ΜΑΘΗΜΑ ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Κατανομές συχνοτήτων (συνεχείς μεταβλητές)

Ο αριθμός των κλάσεων

$$\mathrm{k} = 1 + 3{,}322 \ * \ \log_{10} \mathrm{n}$$

Το πλάτος της κλάσης

$$\delta = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{k}}$$

Το πλάτος του δείγματος

$$\mathrm{d}' = \mathrm{X}'\mathrm{max} \ - \ \mathrm{X}'\mathrm{min}$$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Μέτρα θέσης ή κεντρικής τάσης

Ο αριθμητικός μέσος

Στον πληθυσμό

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{για μη ομαδοποιημένα στοιχεία}$$

$$\mu = \frac{1}{N}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots\ldots + x_k f_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \quad \text{όπου} \quad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία σε k κλάσεις με αντίστοιχες f_i και χ_i

Στο δείγμα

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{για μη ομαδοποιημένα στοιχεία}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots\ldots + x_k f_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \quad \text{όπου} \quad n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία σε k κλάσεις με αντίστοιχες f_i και χ_i

Ο σταθμισμένος μέσος

$$W=\frac{W_1X_1+W_2X_2+........+W_nX_n}{W_1+W_2+........+W_n}$$

Η διάμεσος

$$M = L_m + \frac{\delta_m}{f_m}\left(\frac{n+1}{2} - F_{m-1}\right)$$ για ομαδοποιημένα στοιχεία

Ο τύπος

$$T = L_m + \delta_m \left(\frac{f_m - f_{m-1}}{2f_m - (f_{m-1} + f_{m+1})}\right)$$ για ομαδοποιημένα στοιχεία

Ο γεωμετρικός μέσος

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot X_n}$$ ή αλλιώς,

$$LogG = \frac{1}{n} \cdot [LogX_1 + LogX_2 + ... + LogX_n]$$ για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ \cdot \ \cdot x^{f_k}}$$ ή αλλιώς,

$$LogG = \frac{1}{n} \cdot [f_1 \cdot Log\chi_1 + f_2 \cdot Log\chi_2 + ... + f_k \cdot Log\chi_n]$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία σε k κλάσεις με αντίστοιχες f_i και χ_i

Τα τεταρτημόρια

Όταν ο αριθμός, n, των στοιχείων είναι άρτιος

Θέση $\mathbf{Q_1} = \frac{n+2}{4}$, Θέση $\mathbf{Q_2} = \frac{n+1}{2}$, Θέση $\mathbf{Q_3} = \frac{3n+2}{4}$

για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

Όταν ο αριθμός, n, των στοιχείων είναι περιττός

Θέση $\mathbf{Q_1} = \frac{n+1}{4}$, Θέση $\mathbf{Q_2} = \frac{n+1}{2}$, Θέση $\mathbf{Q_3} = \frac{3(n+1)}{4}$

για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$$Q_1 = L_m + \frac{\delta_m}{f_m}\left(\left[\frac{n+2}{4}\right] - F_{m-1}\right)$$ ή $\left[\frac{n+1}{4}\right]$, όταν n=περιττός αριθμός

$$Q_2 = M = L_m + \frac{\delta_m}{f_m}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - F_{m-1}\right)$$ ή $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, όταν n=περιττός αριθμός

$$Q_3 = L_m + \frac{\delta_m}{f_m}\left(\left[\frac{3n+2}{4}\right] - F_{m-1}\right)$$ ή $\left[\frac{3(n+1)}{4}\right]$, όταν n=περιττός αριθμός για ομαδοποιημένα στοιχεία

Σχέση μεταξύ αριθμητικού μέσου, διαμέσου και τύπου

$\mathbf{T} = \mathbf{M} = \overline{X}$ για συμμετρικές κατανομές

$T < M < \overline{X}$ για ασύμμετρες δεξιά κατανομές

$T > M > \overline{X}$ για ασύμμετρες αριστερά κατανομές

$\overline{X} - T \cong 3 * [\overline{X} - M]$
για μέτρια και όχι υπερβολικά έντονα ασύμμετρες κατανομές

Μέτρα διασποράς ή διακύμανσης

Το πλάτος ή έκταση

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Η τεταρτημοριακή απόκλιση

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Το ημι-ενδοταρτημοριακό πλάτος

$$SIQR = \frac{(M - Q_1) + (Q_3 - M)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Η μέση απόλυτη απόκλιση

$MAD = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} | (X_i - \overline{X}) |$ για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$MAD = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot | (\chi_i - \overline{X}) |$ όπου $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$
για ομαδοποιημένα στοιχεία σε k κλάσεις με αντίστοιχες f_i και χ_i

Η διακύμανση

Στον πληθυσμό

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$ για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (\chi_i - \mu)^2$ όπου $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$ για ομαδοποιημένα στοιχεία

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{1}{N^2} (\sum_{i=1}^{N} X_i)^2$
για μη ομαδοποιημένα στοιχεία και αποφυγή του λάθους στρογγυλοποίησης

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \chi_i^2 - \frac{1}{N^2} (\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \chi_i)^2 \qquad \text{όπου} \quad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία και αποφυγή του λάθους στρογγυλοποίησης

Στο δείγμα

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (\chi_i - \overline{X})^2 \qquad \text{όπου} \quad n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία

Στο τυχαίο δείγμα

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

για μη ομαδοποιημένα στοιχεία

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (\chi_i - \overline{X})^2 \qquad \text{όπου} \quad n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

μη ομαδοποιημένα στοιχεία και αποφυγή του λάθους της στρογγυλοποίησης

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \chi_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \cdot (\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \chi_i)^2 \qquad \text{όπου} \quad n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

ομαδοποιημένα στοιχεία και αποφυγή του λάθους στρογγυλοποίησης

Η τυπική απόκλιση

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ στον πληθυσμό ή $s = \sqrt{s^2}$ στο δείγμα ή $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ στο τυχαίο δείγμα

Ο συντελεστής μεταβολής

$$CV(x) = \frac{S}{\overline{X}} \cdot 100\%$$

Το θεώρημα του Tchebysheff

Σε κάθε σύνολο στοιχείων, η αναλογία των στοιχείων, που βρίσκονται ανάμεσα σε $\pm$**k** *τυπικές αποκλίσεις (σ) από το μέσο τους (μ), είναι κατ' ελάχιστο ίση με:*

1 - (1 / k)²

Μέτρα ασυμμετρίας

Ο συντελεστής ασυμμετρίας του Pearson

$$P_{sk} = \frac{3 \cdot (\overline{X} - M)}{s} \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad P_{sk} = \frac{(\overline{X} - T)}{s}$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας του Bowley

$$B = \frac{2(Q_3 + Q_1 - 2M)}{Q_3 - Q_1}$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας α₃, με βάση τη ροπή 3ης τάξης από τον μέσο

$$m_\nu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^\nu \qquad \text{για μη ομαδοποιημένα στοιχεία}$$

$$m_\nu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \mu)^\nu \qquad \text{όπου} \quad n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

για ομαδοποιημένα στοιχεία σε k κλάσεις με αντίστοιχες f_i και χ_i

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{s^3}$$

Μέτρα κύρτωσης

Ο συντελεστής κύρτωσης α₄, με βάση τη ροπή 4ης τάξης από τον μέσο

$$a_4 = \frac{m_4}{s^4}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας

$$P(A) = \frac{f}{N} \quad \text{ή αλλιώς} \quad P(A) = \frac{\text{ΕΠ}}{\text{ΔΠ}}$$

Ο στατιστικός ορισμός της πιθανότητας

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n}$$

Κανόνες των πιθανοτήτων

Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού

Αν τα Α & Β είναι ανεξάρτητα γεγονότα ισχύει:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Αν τα Α & Β είναι όχι απαραιτήτως ανεξάρτητα γεγονότα ισχύει:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$

Ο κανόνας της πρόσθεσης

Αν τα Α & Β είναι αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα ισχύει:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Αν τα Α & Β είναι όχι απαραιτήτως αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα ισχύει:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Το θεώρημα του Bayes

$P(A_i/B)=[P(A_i)\times P(B/A_i)] / [P(A_i)\times P(B/A_i)+. ..+ P(A_n) \times P(B/A_n)]$, για κάθε i

Στοιχεία συνδυαστικής ανάλυσης

Οι συνδυασμοί n αντικειμένων ανά r, είναι:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ασυνεχείς θεωρητικές κατανομές

Η διωνυμική κατανομή (διαδικασία Bernoulli)

Πιθανότητα μιας ασυνεχούς μεταβλητής X, να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή, έστω r (για r = 0, 1, 2, ..., n):

$$P(x=r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} p^r (1-p)^{n-r}$$

Η κατανομή Poisson

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$P(x=r) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^r}{r!}$$

Συνεχείς θεωρητικές κατανομές

Η κανονική κατανομή

Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(X-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty < X < +\infty$$

Η τυπική κανονική κατανομή

Μετατροπή των τιμών X, μιας κανονικής κατανομής σε τιμές Z της τυπικής κανονικής κατανομής

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ για τον πληθυσμό, $Z = \dfrac{X-\overline{X}}{s}$ για το δείγμα

Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < +\infty$$

Η κατανομή χ^2

Ορισμός

Αν οι Z_1, Z_2, ...Z_ν αποτελούν ανεξάρτητες ποσότητες, που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή, τότε η ποσότητα $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots + Z_\nu^2$ ακολουθεί τη χ^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.

Η κατανομή χ^2 για βαθμούς ελευθερίας ν >100

$$\chi^2 = \frac{1}{2}(Zp + \sqrt{2\nu - 1})^2$$

Η κατανομή t

Ορισμός

Αν Z και U αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, από τις οποίες η Z ακολουθεί την κανονική κατανομή και η U ακολουθεί την χ^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας, τότε η ποσότητα,

$t = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{U}{\nu}}}$ *ακολουθεί την t κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.*

Η κατανομή F

Ορισμός

Αν U_1 και U_2 αποτελούν ανεξάρτητες ποσότητες, οι οποίες ακολουθούν την χ^2 με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας, τότε η ποσότητα,

$F = \dfrac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$ *ακολουθεί την F κατανομή με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας για τον αριθμητή και τον παρονομαστή, αντίστοιχα.*

Ο μέσος της F κατανομής

$\mu=\nu_2/(\nu_2-2)$ για $\nu_2>2$

Η διακύμανση της F κατανομής

$\sigma^2 = [2 \cdot \nu_2^2 \cdot (\nu_1 + \nu_2 - 2)] / [\nu_1 \cdot (\nu_2 - 2)^2 \cdot (\nu_2 - 4)]$ για $(\nu_2 > 4)$

Κατανομές δειγματοληψίας

Η κατανομή δειγματοληψίας του μέσου

Σε δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση ισχύει:

$\mu = \mu_{\overline{X}}$ και $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ και αντίστοιχα $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Σε δειγματοληψία με επανατοποθέτηση ισχύει:

$\mu = \mu_{\overline{X}}$ και $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$ και αντίστοιχα $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Η κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς δύο μέσων

Ισχύουν: $\mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ και $\sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2}$.

Η κατανομή δειγματοληψίας της διακύμανσης

Σε δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση ισχύει

$\sigma^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \mu_{\hat{\sigma}^2}$

Σε δειγματοληψία με επανατοποθέτηση ισχύει

$\sigma^2 = \mu_{\hat{\sigma}^2}$

Επιλογή τυχαίου δείγματος

Πίνακας Τυχαίων Αριθμών [Απόσπασμα…]

6975	**5239**	***0762**	**5846**	**2431**
7185	**4019**	**7332**	**2820**	**4853**
4510	**1658**	**5615**	**2194**	**1901**
7752	**0105**	**4769**	**2994**	**7445**
4834	**4043**	**6591**	**3646**	**8918**

Κατανομή δειγματοληψίας των αναλογιών

$$\pi = \frac{A}{N} \text{ στον πληθυσμό} \qquad p_i = \frac{n_i}{n} \text{ στο δείγμα}$$

- *Δειγματοληψία με επανατοποθέτηση*

$$\mu_p = \pi \qquad \sigma_p^2 = \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}$$

- *Δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση*

$$\mu_p = \pi \qquad \sigma_p^2 = \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Κατανομή δειγματοληψίας διαφοράς αναλογιών

$$\mu_{p_1-p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = \pi_1 - \pi_2$$

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \frac{\pi_1 \cdot (1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2 \cdot (1-\pi_2)}{n_2} \qquad \text{ή}$$

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \frac{\pi_1 \cdot (1-\pi_1)}{n_1} \cdot \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\pi_2 \cdot (1-\pi_2)}{n_2} \cdot \frac{N_2-n_2}{N_2-1}$$

ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης

Το διάστημα εμπιστοσύνης και τα όρια εμπιστοσύνης

Η πιθανότητα **100(1-α)%**, *με την οποία εκφράζεται το διάστημα εμπιστοσύνης μιας παραμέτρου ϑ ισούται:*

$$P(\hat{\vartheta} - k < \vartheta < \hat{\vartheta} + k) = 1 - \alpha \quad , \qquad 0<\alpha<1$$

Η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης του μέσου

Όταν ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} \text{ , όπου } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Όταν ισχύει το προσεγγιστικό κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\overline{X} - t_{\alpha/2} \cdot s_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2} \cdot s_{\overline{X}} \qquad \text{όπου } s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \text{ή ....}$$

Η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς δύο μέσων

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 γνωστές

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

$$\text{με } \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \cdot \frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \cdot \frac{N_2-n_2}{N_2-1}} \qquad \text{ή} \qquad \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 άγνωστες, δείγματα μεγάλα ($n_1 \geq 30$ και $n_2 \geq 30$)

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}\cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < \mu_1-\mu_2 < (\overline{X}_1-\overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}\cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

με $\hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$ ή $\hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)}$

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις άγνωστες και $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, δείγματα μικρά ($n_1<30$ και $n_2<30$)

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - t_{\alpha/2}\cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < \mu_1-\mu_2 < (\overline{X}_1-\overline{X}_2) + t_{\alpha/2}\cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} \qquad \nu = n_1+n_2-2$$

με $\hat{\sigma}^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \hat{\sigma}^2\cdot\left(\frac{1}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{1}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)$ ή $\hat{\sigma}^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \hat{\sigma}^2\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$

και $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις άγνωστες και $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, δείγματα μικρά ($n_1<30$ και $n_2<30$)

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - t_{\alpha/2}\cdot s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < \mu_1-\mu_2 < (\overline{X}_1-\overline{X}_2) + t_{\alpha/2}\cdot s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

με $s^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \frac{s_1^2}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{s_2^2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}$ ή $s^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}$

και $\nu = \dfrac{1}{\dfrac{w^2}{n_1-1}+\dfrac{(1-w)^2}{n_2-1}}$, όπου $w = \dfrac{s_1^2/n_1}{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}$ για $s_1^2 > s_2^2$

Η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της διακύμανσης

$$\frac{(n-1)\cdot\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης των αναλογιών για μεγάλα δείγματα

$$p - Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_p < \pi < p + Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_p$$

όπου:

$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ ή $\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Διάστημα εμπιστοσύνης διαφοράς αναλογιών για μεγάλα δείγματα

$$(p_1 - p_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{p_1 - p_2} < \pi_1 - \pi_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{p_1 - p_2}$$

όπου:

$$\hat{\sigma}_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2}}$$

ή

$$\hat{\sigma}_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1} \cdot \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} + \frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2} \cdot \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου για εξαρτημένα δείγματα

Όταν ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\bar{\delta} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{\delta}} < \mu_\delta < \bar{\delta} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{\delta}}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_{\bar{\delta}} = \frac{\sigma_\delta}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \ \ldots\ldots$$

Όταν ισχύει το προσεγγιστικό κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\bar{\delta} - t_{\alpha/2} \cdot s_{\bar{\delta}} < \mu_\delta < \bar{\delta} + t_{\alpha/2} \cdot s_{\bar{\delta}} \qquad \text{όπου} \quad s_{\bar{\delta}} = \frac{s_\delta}{\sqrt{n}} \qquad \text{ή} \ \ldots\ldots$$

Σφάλμα δειγματοληψίας και μέγεθος δείγματος

Ο προσδιορισμός του μεγέθους δείγματος

Όταν στόχος είναι η εκτίμηση του μέσου σε απλή τυχαία δειγματοληψία

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2}{e^2} \quad , \qquad \text{με} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ή

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2 \cdot N}{e^2 \cdot (N - 1) + Z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2} \quad , \qquad \text{με} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}} \cdot \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Όταν στόχος είναι η εκτίμηση της αναλογίας σε απλή τυχαία δειγματοληψία

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}{e^2} \quad , \qquad \text{με} \quad \sigma^2_p = \frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}$$

ή

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \pi \cdot (1 - \pi) \cdot N}{e^2 \cdot (N - 1) + Z^2_{\alpha/2} \cdot \pi \cdot (1 - \pi)} \quad , \quad \text{με} \quad \sigma^2_p = \frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Έλεγχος υπόθεσης του μέσου

Όταν ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα

Οι υποθέσεις

$Ho: \mu = \mu_o$ και
$Ha: \mu < \mu_o$ ή $Ha: \mu > \mu_o$ ή $Ha: \mu \neq \mu_o$

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\sigma_{\overline{X}}} \quad \text{με} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Το κρίσιμο πεδίο

$Z \leq -Z_\alpha$ *για* $Ha: \mu < \mu_o$*, ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο*
$Z \geq Z_\alpha$ *για* $Ha: \mu > \mu_o$*, ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο*
$Z \leq -Z_{\alpha/2}$ *και* $Z \geq Z_{\alpha/2}$ *για* $Ha: \mu \neq \mu_o$*, ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο*

Όταν ισχύει το προσεγγιστικό κεντρικό οριακό θεώρημα

Οι υποθέσεις

$Ho: \mu = \mu_o$ και
$Ha: \mu < \mu_o$ ή $Ha: \mu > \mu_o$ ή $Ha: \mu \neq \mu_o$

Η κατανομή δειγματοληψίας.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_o}{s_{\overline{X}}} \quad \text{με } \nu = n-1 \text{ βαθμούς ελευθερίας} \quad \text{και} \quad s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Το κρίσιμο πεδίο.

$t \leq -t_\alpha$ *για* $Ha: \mu < \mu_o$*, ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο*
$t \geq t_\alpha$ *για* $Ha: \mu > \mu_o$*, ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο*
$t \leq -t_{\alpha/2}$ *και* $t \geq t_{\alpha/2}$ *για* $Ha: \mu \neq \mu_o$*, ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο*

Έλεγχος υπόθεσης της διαφοράς δύο μέσων

Ο προσδιορισμός των υποθέσεων:

$Ho: \mu_1 = \mu_2$ ή $Ho: \mu_1 \geq \mu_2$ ή $Ho: \mu_1 \leq \mu_2$
$Ha: \mu_1 \neq \mu_2$ ή $Ha: \mu_1 < \mu_2$ ή $Ha: \mu_1 > \mu_2$

ή εναλλακτικά:

$Ho: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ή $Ho: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ ή $Ho: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$
$Ha: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ή $Ha: \mu_1 - \mu_2 < 0$ ή $Ha: \mu_1 - \mu_2 > 0$

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 γνωστές

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

με

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}} \quad ή \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Το κρίσιμο πεδίο

$Z \le -Z_\alpha$ *για* $H\alpha : \mu_1 < \mu_2$, *ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο*
$Z \ge Z_\alpha$ *για* $H\alpha : \mu_1 > \mu_2$, *ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο*
$Z \le -Z_{\alpha/2}$ *και* $Z \ge Z_{\alpha/2}$ *για* $H\alpha : \mu_1 \ne \mu_2$, *ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο*

Διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 άγνωστες, δείγματα μεγάλα ($n_1 \ge 30$ και $n_2 \ge 30$)

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

με

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \quad ή \quad \hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}+\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_2}\right)}$$

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις άγνωστες και $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, δείγματα μικρά ($n_1<30$ και $n_2<30$)

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \qquad \text{για } v= n_1+n_2-2 \text{ βαθμούς ελευθερίας}$$

με

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\hat{\sigma}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{1}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \quad ή \quad \hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

και

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad \text{κοινή διακύμανση των δύο πληθυσμών}$$

Το κρίσιμο πεδίο

$t \le -t_\alpha$ *για* $H\alpha : \mu_1 < \mu_2$, *ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο*
$t \ge t_\alpha$ *για* $H\alpha : \mu_1 > \mu_2$, *ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο*
$t \le -t_{\alpha/2}$ *και* $t \ge t_{\alpha/2}$ *για* $H\alpha : \mu_1 \ne \mu_2$, *ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο*

Πληθυσμοί κανονικοί, διακυμάνσεις άγνωστες και $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$, δείγματα μικρά ($n_1<30$ και $n_2<30$)

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

με

$$s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{s_2^2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}} \qquad ή \qquad s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

και βαθμούς ελευθερίας **ν,** που υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\nu=\frac{1}{\frac{\mathbf{w}^2}{\mathbf{n}_1-1}+\frac{(1-\mathbf{w})^2}{\mathbf{n}_2-1}}, \quad \text{όπου} \quad w=\frac{s_1^2/n_1}{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \quad \text{για} \quad s_1^2>s_2^2$$

Το κρίσιμο πεδίο

$t \le -t_\alpha$ για Ηα : $\mu_1 < \mu_2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο
$t \ge t_\alpha$ για Ηα : $\mu_1 > \mu_2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο
$t \le -t_{\alpha/2}$ και $t \ge t_{\alpha/2}$ για Ηα : $\mu_1 \ne \mu_2$, ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο

Έλεγχος υπόθεσης της διακύμανσης

Ο έλεγχος υπόθεσης της διακύμανσης ενός πληθυσμού

Οι υποθέσεις.

Ηο : $\sigma^2 = \sigma_o^2$ και
Ηα : $\sigma^2 < \sigma_o^2$ ή Ηα : $\sigma^2 > \sigma_o^2$ ή Ηα : $\sigma^2 \ne \sigma_o^2$

Η κατανομή δειγματοληψίας

$$\chi^2=\frac{(n-1)\cdot\hat{\sigma}^2}{\sigma_o^2}$$ με ν=n-1 βαμούς ελευθερίας

Το κρίσιμο πεδίο

$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}$ για Ηα : $\sigma^2 < \sigma_o^2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο
$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha$ για Ηα : $\sigma^2 > \sigma_o^2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο
$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}$ και $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}$ για Ηα : $\sigma^2 \ne \sigma_o^2$, ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο

Έλεγχος υπόθεσης του «λόγου» διακυμάνσεων δύο πληθυσμών

Οι υποθέσεις.

Ηο : $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ ή Ηο : $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ ή Ηο : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Ηα : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ή Ηα : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ή Ηα : $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$

ή εναλλακτικά:

Ηο : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \ge 1$ ή Ηο : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \le 1$ ή Ηο : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$
Ηα : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$ ή Ηα : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$ ή Ηα : $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \ne 1$

Η κατανομή δειγματοληψίας.

$$F=\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$$ με $\nu_1=n_1-1$ και $\nu_2=n_2-1$ βαθμούς ελευθερίας

Το κρίσιμο πεδίο.

$F \le F_{1-\alpha}$ για Ηα : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο αριστερά έλεγχο
$F \ge F_\alpha$ για Ηα : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, ή αλλιώς για μονόπλευρο δεξιά έλεγχο
$F \le F_{1-\alpha/2}$ και $F \ge F_{\alpha/2}$ για Ηα : $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$, ή αλλιώς για δίπλευρο έλεγχο

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Έλεγχος καλής προσαρμογής

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής ως προς την κανονική κατανομή

Οι υποθέσεις

Ho: Το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό

Ηα: Το δείγμα δεν προέρχεται από κανονικό πληθυσμό

Η κατανομή

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$ για ν = k-r βαθμούς ελευθερίας

Έλεγχος ανεξαρτησίας

Έλεγχος ανεξαρτησίας σε πίνακες κατάταξης $r \times c$

Οι υποθέσεις

Ho: Τα δύο κριτήρια κατάταξης είναι ανεξάρτητα

Ηα: Τα δύο κριτήρια κατάταξης είναι εξαρτημένα

Οι θεωρητικές συχνότητες

$E_{ij} = n \cdot p_{i.} \cdot p_{.j} = n \cdot p_{ij}$

Η κατανομή

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{Eij}$$ για ν=(r-1) · (c-1) βαθμούς ελευθερίας

Έλεγχος ανεξαρτησίας σε πίνακες κατάταξης 2×2 (διόρθωση Yates)

Α κριτήριο κατάταξης	**Β** κριτήριο κατάταξης Επίπεδα κατάταξης		
Επίπεδα κατάταξης	1	2	Σύνολο
1	**α**	**β**	***α+β***
2	**γ**	**δ**	***γ+δ***
Σύνολο	***α+γ***	***β+δ***	***n***

Η κατανομή

$$\chi^2 = \frac{n \cdot (|\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma| - \frac{1}{2} \cdot n)^2}{(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\delta)\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)}$$ για ν=(r-1) · (c-1) βαθμούς ελευθερίας

Έλεγχος ανεξαρτησίας σε πίνακες κατάταξης 2×c

Α κριτήριο κατάταξης	Β κριτήριο κατάταξης Επίπεδα κατάταξης					
Επίπεδα κατάταξης	1	2	.	.	c	**Σύνολο**
1	α_1	α_2	.	.	α_c	***A***
2	β_1	β_2	.	.	β_c	***B***
Σύνολο	n_1	n_2	.	.	n_c	***n***

Η κατανομή

$$X^2 = \frac{\sum_j \frac{\alpha_j^2}{n_j} - \frac{A^2}{n}}{\frac{A}{n}\left(1-\frac{A}{n}\right)}$$

για ν=(r-1) · (c-1) βαθμούς ελευθερίας

Έλεγχος ομοιογένειας

Οι υποθέσεις που ελέγχονται

Ηο: οι πληθυσμοί είναι ομοιογενείς

Ηα: οι πληθυσμοί είναι ετερογενείς

ή εναλλακτικά:

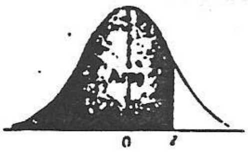
Ηο: $\pi_{11} = \pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{14}$

$\pi_{21} = \pi_{22} = \pi_{23} = \pi_{24}$

$\pi_{31} = \pi_{32} = \pi_{33} = \pi_{34}$

Ηα: Μία τουλάχιστον διαφοροποίηση στις παραπάνω ισότητες

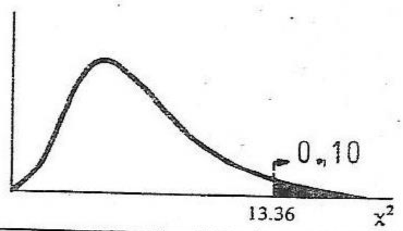
Κανονική κατανομή



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0028
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Πηγή : Walpole, R.E. (1976). Elementary statistical
concepts. Macmillan. New York

Κατανομή χ^2



V \ P	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	P / V
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^23	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
Z_p	−2.58	−2.33	−1.96	−1.64	−1.28	−0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.960	2.33	2.58	Z_p

Πηγή: Parsons, R. (1974). Statistical analysis : A decision making approach, Harper and Row, New York.

Κατανομή t

v	Πιθανότητα μίας αριθμητικά μεγαλύτερης τιμής t								
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291
v	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
	Πιθανότητα μίας μεγαλύτερης θετικής τιμής της t								

Πηγή: Steel, R.G.D and J. H. Torrie, (1980). Principles and procedures of statistics: A biometrical approach, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo.

Κατανομή F

v_2	P	v_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
	.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
	.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72

Συνεχίζεται